เฉลยชุดข้อสอบ : งาน พลังงาน โมเมนตัม ชุดที่ 2

ข้อที่ 1

ตอบ $\left(\dfrac{m}{m+M}\right)^2 l$

ใช้หลักการอนุรักษ์พลังงานหาความเร็วของมวล m ก่อนกระทบ

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v &= \sqrt{2gl} \end{aligned}$$

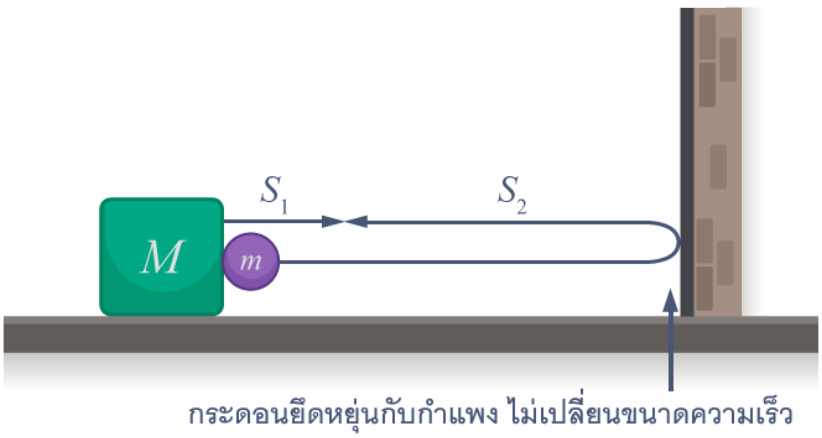
หลังจากการชน มวลทั้งสองติดไปด้วยกันเป็นการเป็นการชนแบบ Completely inelastic collision ดังนั้นจึงใช้หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมในการหาความเร็วหลังการชน

$$\begin{aligned} P_{i,m} + P_{i,m} &= P_f \\ m\sqrt{2gl} + M(0) &= (m+M)v_f \\ v_f &= \frac{m}{m+M}\sqrt{2gl} \end{aligned}$$

หลังจากนั้นมวลทั้งสองเคลื่อนที่รอบจุดหมุนตามแนวรัศมี l ของเชือก จนถึงจุดที่มีพลังงานศักย์สูงสุด ดังนั้นจากกฎการอนุรักษ์พลังงานจะสามารถหาตำแหน่งที่มวลทั้งสองขึ้นไปสูงสุด

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m+M)v_f^2 &= (m+M)gh_{\max} \\ h_{\max} &= \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2(2gl) \\ &= \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 l \end{aligned}$$

ข้อที่ 2



ระยะทางรวม $S_1 + S_2 = 2D$

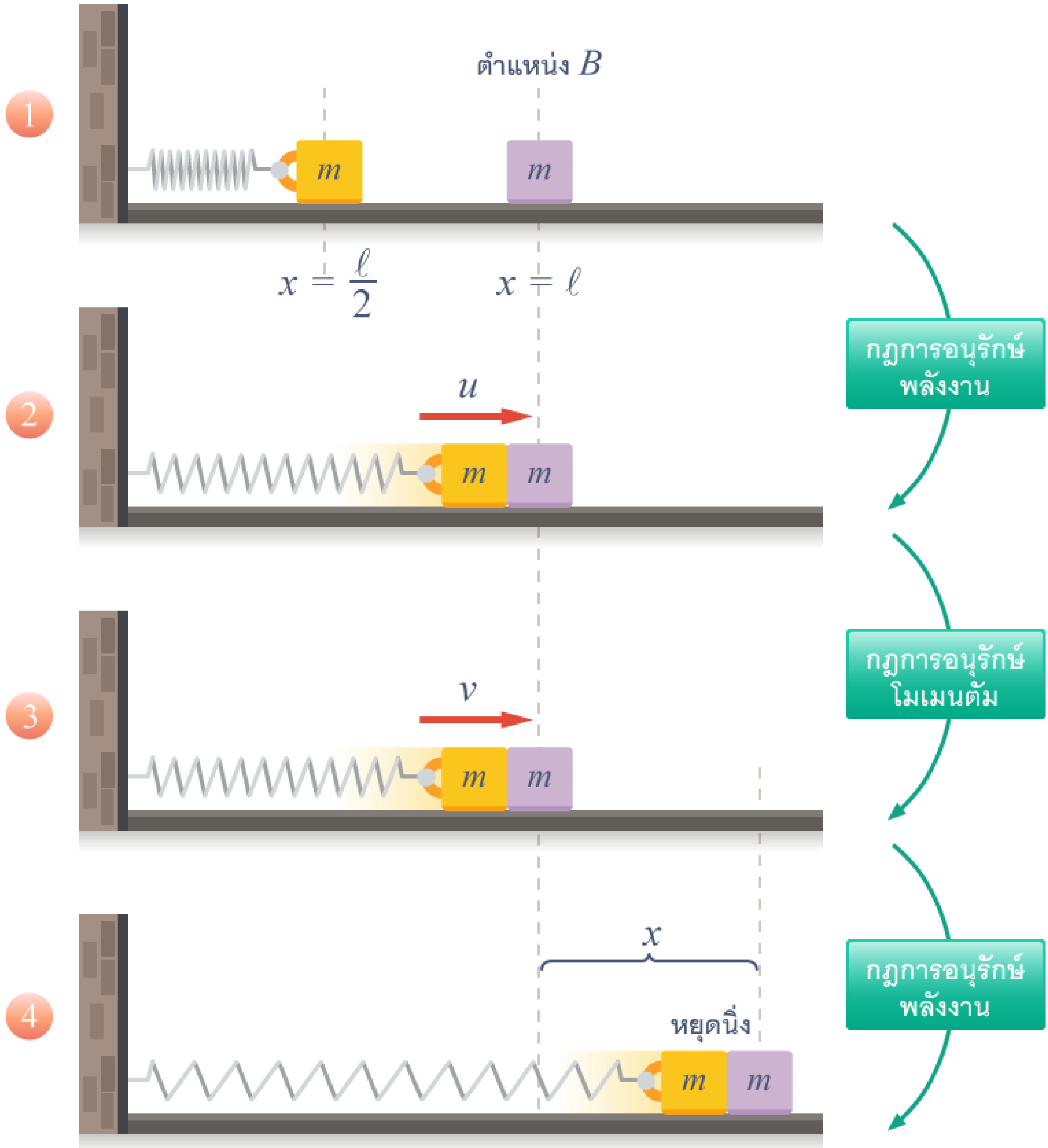
$$
\begin{aligned}
2D &= S_1 + S_2 \\
2D &= vt + ut \\
\frac{2D}{u+v} &= t
\end{aligned}
$$

ระยะ $S_2 = ut$

$$\therefore S_2 = \frac{2uD}{u+v}$$

ข้อที่ 3

ตอบ $\frac{l}{2\sqrt{2}}$



แบ่งสถานการณ์ในโจทย์ออกเป็นสถานการณ์ย่อย ดังนี้

1) m ติดสปริงไปหดที่ $x = \frac{l}{2}$

จุดนี้มีพลังงาน (ศักย์สปริง)

$$E_1 = \frac{1}{2}k(\frac{l}{2})^2$$

2) ขณะสปริงยืดไปที่ความยาวธรรมชาติก่อนจะไปชน m อีกก้อนที่ B

จุดนี้มีพลังงาน (จลน์)

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$E_1 = E_2$, พลังงานอนุรักษ์เนื่องจากแรงสปริงเป็นแรงอนุรักษ์

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k(\frac{l}{2})^2 &= \frac{1}{2}mu^2 \\ u &= \frac{l}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

3) มวล m ทั้ง 2 ชนกันแล้วติดกันไป (พลังงานไม่อนุรักษ์แล้ว) โมเมนตัมก่อนชน=หลังชน

$$\begin{aligned} P_4 &= P_3 \\ mu &= 2mv \\ v &= \frac{u}{2} \\ &= \frac{l}{4}\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

4) มวลทั้ง 2 ก้อนดึงสปริงจากจุด B ให้ยืดสุดที่ x นั่นคือมีพลังงาน (ศักย์สปริง), $E_4 = \frac{1}{2}kx^2$

จาก $3 \rightarrow 4$ พลังงานอนุรักษ์

$$\begin{aligned} E_3 &= E_4 \\ 2 \times \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}kx^2 \\ x &= \frac{l}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ข้อที่ 4

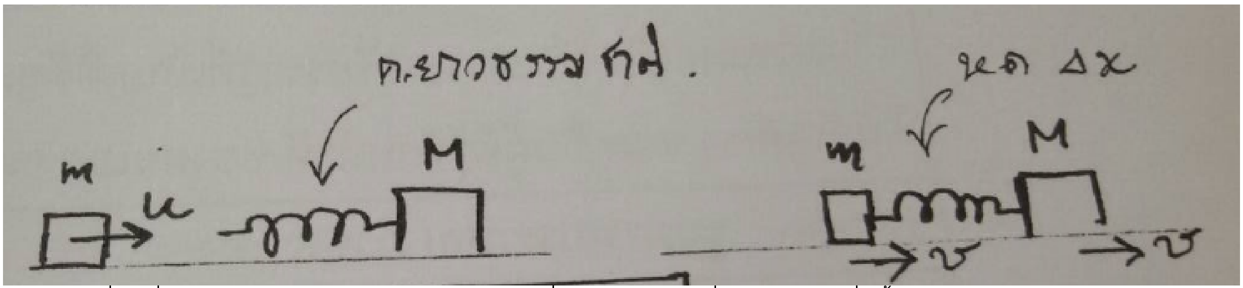
ตอบ $5 \times 10^9 \ \mathrm{g} \cdot (\mathrm{mm/s})^2$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 1 \ \mathrm{J} &= 1\,\mathrm{kg} \cdot (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 \\ 5 \ \mathrm{J} &= 5 \times \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \times \frac{1000\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{kg}} \times (\frac{10^3\mathrm{mm}}{1\,\mathrm{m}})^2 \\ &= 5 \times 10^9\,\mathrm{g} \cdot (\mathrm{mm/s})^2 \end{aligned}$$

ข้อที่ 5

ตอบ $u\sqrt{\frac{1}{k}(\frac{Mm}{M+m})}$



มวล m เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u ชนมวล M ในขณะที่ชน มวลMจะเริ่มมีความเร็วเพิ่มขึ้น มวลmจะมีความเร็วลดลง จนถึงจุดที่มวลทั้งสองมีความเร็วเท่ากัน สปิงจะหดมากที่สุด สามารถใช้กฏการอนุรักษ์โมเมนตัม เขียนสมการกได้ว่า

$$mu = (m+M)v$$
$$v = \frac{mu}{m+M}$$

และ พลังงานบางส่วนของมวล m ถูกเปลี่ยนเป็นพลังงานศักย์ในขดสปิงซึ่งแปรผันกับระยะหดของสปริง ใช้กฏการอนุรักษ์พลังงาน เขียนสมการได้ว่า

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$
$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{k}(\frac{Mm}{M+m})}u$$

ข้อที่ 6

ตอบ 2 เท่า

เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ ดังนั้นสามารถใช้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมพิจารณาก่อนและหลังการระเบิดได้ว่า

$$P_{\text{total}} = P_A + P_B$$
$$mv = \frac{m}{2}v_A + \frac{m}{2}(O)$$
$$v_A = 2v$$

จะได้ว่าที่จุดสูงสุด v_A จะเร็วเป็น 2 เท่าของความเร็วก่อนระเบิดในแนวระดับ และเนื่องจากระยะเวลาจากจุดตั้งต้นจนถึงจุดสูงสุดเท่ากันกับเวลาจากจุดสูง สุดจนตกถึงพื้นอีกครั้ง ดังนั้นวัตถุชิ้น A จึงเคลื่อนที่ได้ระยะทางสองเท่าของระยะ OC ด้วย

ข้อที่ 7

ความเร็วก่อนกระแทกครั้งแรก

$$v = \sqrt{2gH}$$

ความเร็วหลังกระแทกครั้งแรก

$$v_1 = e\sqrt{2gH}$$

ความเร็วหลังกระแทกครั้งที่สอง

$$v_2 = e^2\sqrt{2gH}$$

ความเร็วหลังกระแทกครั้งที่ n

$$v_n = e^n\sqrt{2gH}$$

พลังงานจลน์หลังกระแทกครั้งที่ n

$$E_{kn} = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}m(e^n\sqrt{2gH})^2 = e^{2n}mgH$$

และจะกระดอนขึ้นไปได้สูงสุดหลังจากกระแทกครั้งที่ n

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 + 2as \\ 0^2 &= (e^n\sqrt{2gH})^2 - 2gs \\ s &= e^{2n}H \end{aligned}$$

ข้อที่ 8

ตอบ $75^\circ\mathrm{C}$

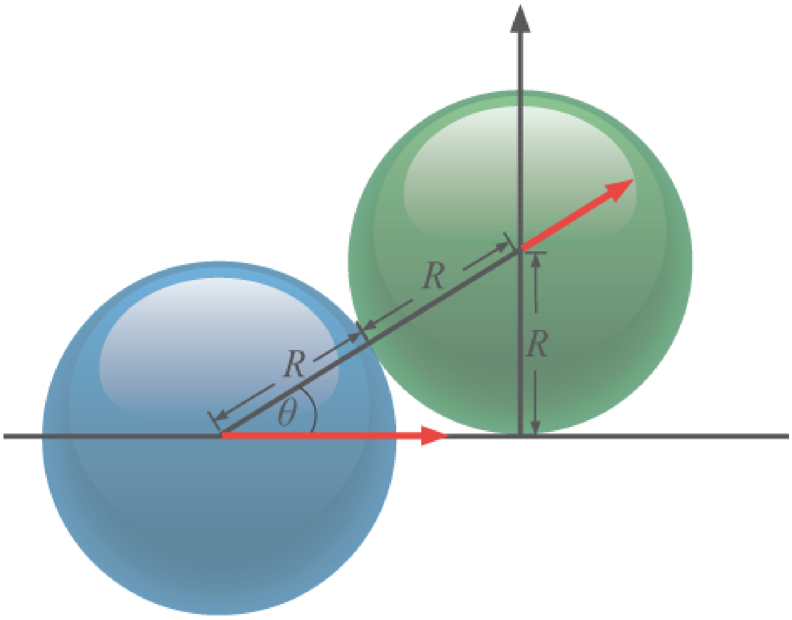
ครึ่งหนึ่งของพลังงานจลน์เสียไปให้เป็นพลังงานความร้อน

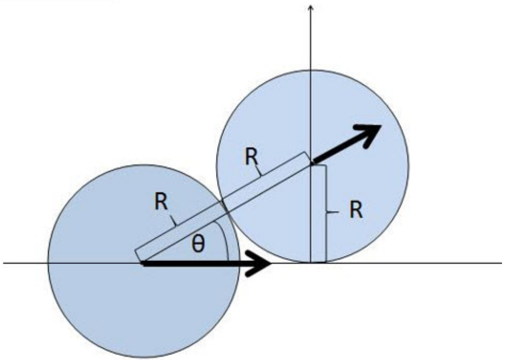
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = ms\Delta T$$

เมื่อ s คือความจุความร้อนจำเพาะของตะกั่ว ดังนั้น

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{v^2}{4s} \\ &= \frac{1}{4}\frac{(200\ \mathrm{m/s})^2}{0.032 \times 1.00\ \frac{\mathrm{cal}}{(\mathrm{g} \cdot^\circ \mathrm{C})} \times\ (4.186\ \frac{\mathrm{kg}\cdot(\mathrm{m/s})^2}{\mathrm{cal}})} \\ &= 75^\circ\mathrm{C} \end{aligned}$$

ข้อที่ 9





จากรูปขณะที่ชนกัน จะได้ว่า

$$\sin\theta = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

ซึ่ง

$$\theta = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

ข้อที่ 10

โจทย์บอกว่าไม่มีการสะดุดและกระแทก

$$\because mg = \frac{MV^2}{R}$$

$$gR = v^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

และจากกฎการอนุรักษ์พลังงาน จะได้ว่า

$$\sum E_{\mathrm{A}} = E_{\mathrm{B}}$$

ตั้งจุด B เป็นระดับอ้างอิง และให้ระยะทางที่ต้องการเป็น x
จะได้

$$mgx = \frac{1}{2}MV^2$$

$$V^2 = 2gx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

แก้สมการ 1 กับ 2 จะได้

$$x = \frac{R}{2}$$

ข้อที่ 11

ปล่อยลูกบอลตกลงมาจากที่สูง $H_1 = 10\ \mathrm{m}$ ตกลงมาถึงพื้นด้วยความเร็วขนาด u_1 ทิศชี้ลงพื้น
ลูกบอลกระดอนแล้วลอยขึ้นด้วยความเร็วขนาด u_2 และลอยไปได้สูง $H_2 = 2.5\ \mathrm{m}$
ระหว่างตกลงมาที่พื้น พลังงานอนุรักษ์จะได้ว่า

พลังงานศักย์ที่ลดลง = พลังงานจลน์ที่เพิ่มขึ้น

$$PE_i = KE_f$$

$$mgH_1 = \frac{1}{2}mu_1^2$$

นั่นคือ

$$u_1 = \sqrt{2gH_1}$$

เช่นเดียวกันขณะที่กระดอนเสร็จแล้วพอดี แล้วเริ่มลอยขึ้น

พลังงานจลน์ที่ลดลง = พลังงานศักย์ที่เพิ่มขึ้น

จะได้ว่า

$$u_2 = \sqrt{2gH_2}$$

นั่นคือในช่วงระหว่างกระดอนด้วยช่วงเวลาทั้งหมด $\Delta t = 0.1\ \mathrm{s}$ วัตถุจะมีความเร่ง(เป็นปริมาณเวกเตอร์)ที่มีขนาด

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{a}\right| &= \left|\frac{\Delta \overrightarrow{u}}{\Delta t}\right| \\ &= \frac{\sqrt{2gH_2} - \left(-\sqrt{2gH_1}\right)}{\Delta t} \\ &= \frac{\sqrt{2\left(9.8\ \mathrm{m/s^2}\right)\left(2.5\ \mathrm{m}\right)} + \sqrt{2\left(9.8\ \mathrm{m/s^2}\right)\left(10\ \mathrm{m}\right)}}{0.1\ \mathrm{s}}\end{aligned}$$

นั่นคือ ทิศนั้นมีทิศชี้ขึ้น

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = 2.1 \times 10^2\ \mathrm{m/s^2}$$

ข้อที่ 12

ตอบ $v_M = \dfrac{M}{M+m}v_\circ$ และ $PE = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{mM}{M+m}\right)v_\circ^2$

สถานการณ์ดังโจทย์กำหนดจะเป็นไปตามนี้คือ เมื่อมวล M เริ่มเคลื่อนที่ไปทางขวา ขณะที่ยางยืดเริ่มดึงมวล m จะเริ่มเคลื่อนที่ ตราบที่มวล M ยังคงเคลื่อนที่ไปทางขวา มวล M จะดึงยางให้ยืดมากขึ้นพร้อมๆกับที่มวล m ก็จะมีความเร็วเพิ่มขึ้น จนถึงขณะที่ความเร็วของมวลทั้งสองเท่ากันยางจะยืดมากที่สุด สถานการณ์ตั้งแต่มวล M เริ่มเคลื่อนที่จนกระทั่งมีความเร็วคงที่นี้ สามารถพิจารณาว่าเป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่น (Inelastic Collision) สามารถคำนวญหาความเร็วของมวลทั้งสองได้จากกฏการอนุรักษ์โมเมนตัม :

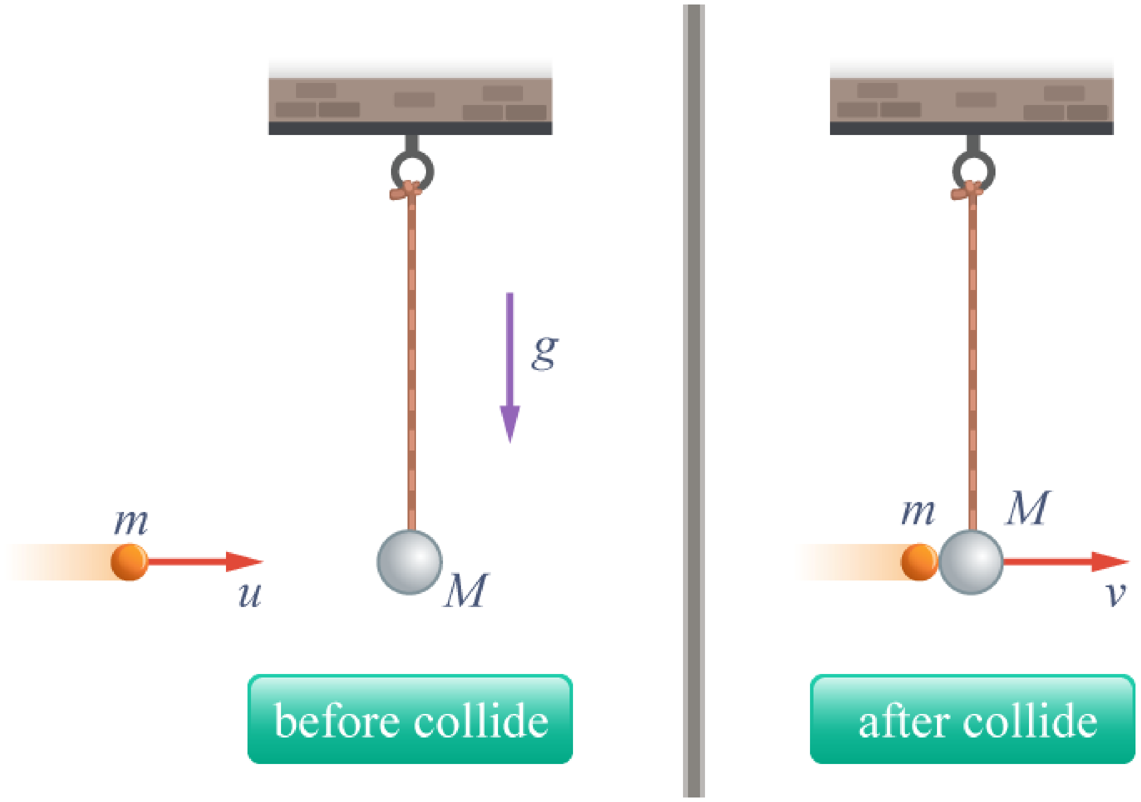
$$\begin{aligned}Mv_\circ &= Mv + mv \\ v &= \frac{M}{M+m}v_\circ\end{aligned}$$

เป็นความเร็วของมวล M และ m
ในการหาพลังงานศักย์ในยางยืด (PE) สามารถใช้กฎการอนุรักษ์พลังงานได้ โดยที่

$$
\begin{aligned}
KE_{\text{เริ่มดึด}} &= KE_{\text{ยืดสุด}} + PE \\
PE &= KE_{\text{เริ่มดึด}} - KE_{\text{ยืดสุด}} \\
&= \frac{1}{2}Mv_\circ^2 - \frac{1}{2}(M+m)v^2 \\
&= \frac{1}{2}Mv_\circ^2 - \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{M}{M+m}v_\circ\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{mM}{M+m}\right)v_\circ^2
\end{aligned}
$$

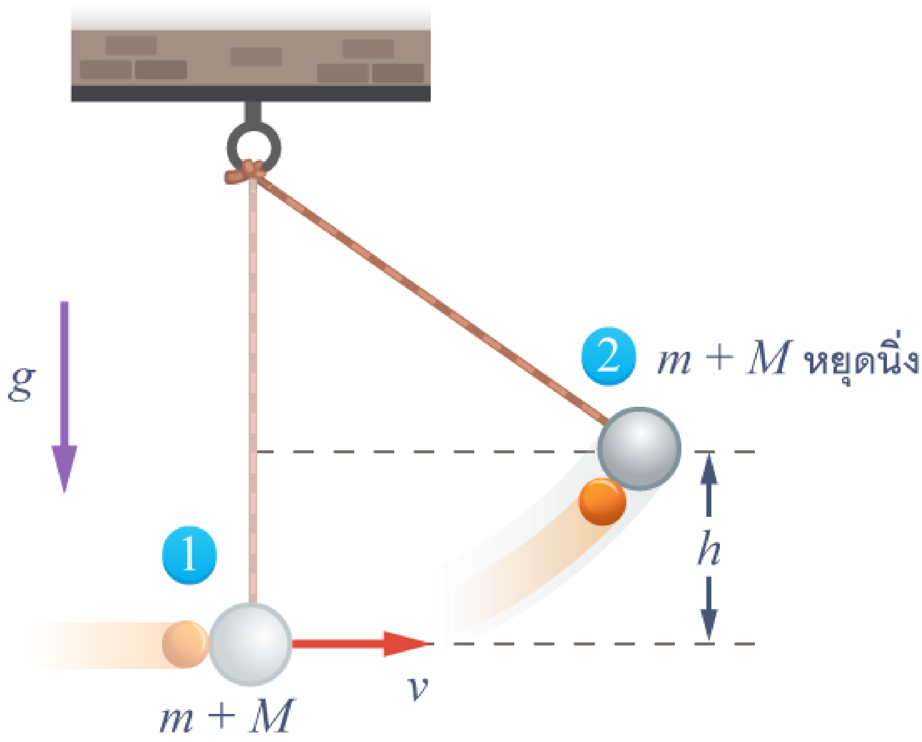
ข้อที่ 13

ตอบ สูงจากเดิม $\frac{1}{2g}\left(\frac{m}{m+n}\right)^2$



ในขั้นแรก เราต้องคำนวณหาความเร็วหลังชนของ m และ M ก่อน (โจทย์กำหนดให้ชนแล้วติดกันไป)
กฎอนุรักษ์โมเมนตัม

$$
\begin{aligned}
mu &= (m+M)v \\
v &= \left(\frac{m}{m+M}\right) \times u
\end{aligned}
$$



หาความสูงที่เหวี่ยงไปได้ จากกฎอนุรักษ์พลังงาน
$E_{\text{ที่}1} = E_{\text{ที่}2}$

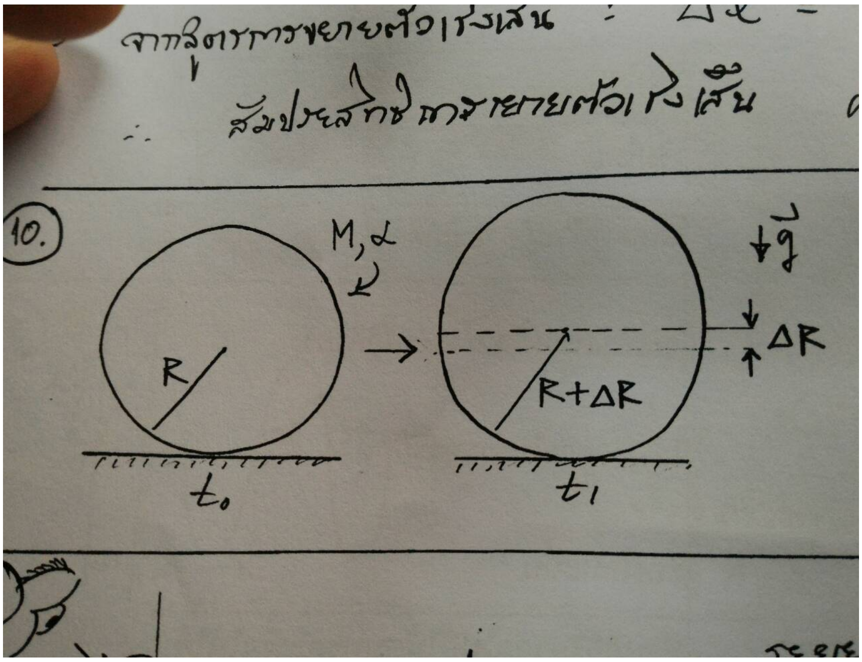
$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 \;=\; (m+M)gh$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} h &= \frac{v^2}{2g} \\ &= \frac{v^2}{2g}\left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \end{aligned}$$

ข้อที่ 14

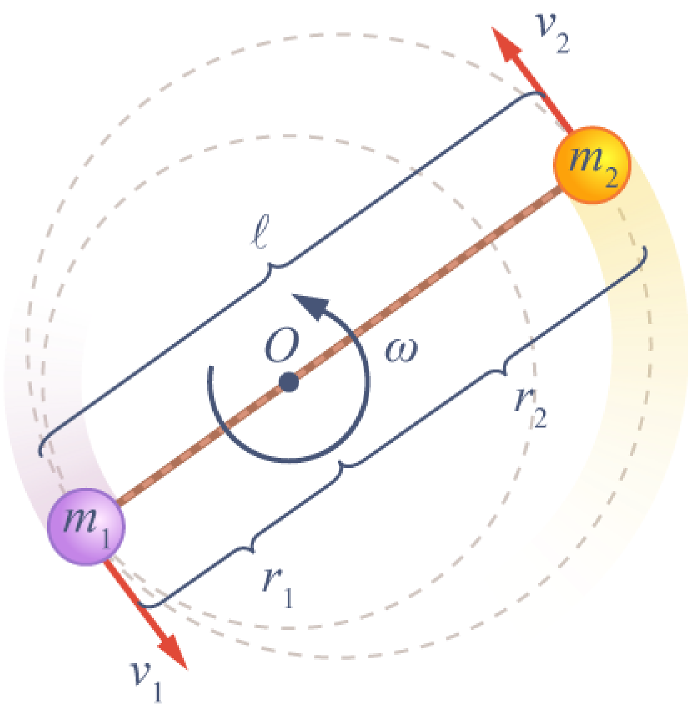
ตอบ $Mg\alpha R(t_1 - t_\circ)$



จุด CM ของมวล M จะสูงขึ้นเท่ากับ ΔR ที่มีรัศมีของมันเพิ่มขึ้น
จากอุณหภูมิ $\Delta \mathrm{T} = \mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_\circ$ เพิ่มขึ้น
$\Delta R = \alpha R(t_1 - t_\circ) \rightarrow \Delta E_P = Mg\Delta R$
$\therefore$ พลังงานศักย์เพิ่มขึ้น $Mg\alpha R(t_1 - t_\circ)$

ข้อที่ 15

ตอบ ขนาดความเร็วสัมพัทธ์ $= \omega l$



(จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของเส้นประวงกลมทั้งสอง แก้รูปนิดหน่อย //ปณต)
ทั้ง m_1 และ m_2 จะหมุนรอบจุด CM (ไม่มีแรงลัพธ์ภายนอก ซึ่ง CM ต้องไม่มีความเร่ง, ไม่หมุนและต้องเป็นจุดหมุน)
จะหา r_1 และ r_2 ได้:

$$r_1 + r_2 = l \tag{1}$$
$$r_1 m_1 = r_2 m_2 \tag{2}$$

$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}$$
$$r_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$$

ความเร็วเชิงเส้นของทั้ง 2 หาจาก

$$v_1 = \omega r_1$$
$$v_2 = \omega r_2$$

เนื่องจากกทั้ง 2 วิ่งสวนกัน

$$\therefore v_{rela} = v_1 + v_2 = \omega l$$

ข้อที่ 16

1) จาก นิยามของ v_{cm} จะได้

$$v_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_1}$$

โมเมนตัมรวมของระบบเทียบจุดศูนย์กลางมวล คือ

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i (v - v_{cm}) i$$

จึงได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_i - \sum_{i=1}^{i=n} m_i v_{cm} = 0$$

2) พลังงานจลน์ของระบบคือ

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i (v_{cm} + v_{i,cm})^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i v_{i,cm}^2$$

ใช้ผลจากข้อที่แล้วร่วมด้วย เพื่อตัดพจน์ตรงกลางทิ้งไป

$$\therefore KE_{system} = KE_{cm} + KE_{around\ cm}$$

ข้อที่ 17

4.1 จากกฎการณ์อนุรักษ์โมเมนตัม(ในแนวแกน X) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
M_1 &= M_2 \\
0 &= MV - m(\dot{\theta} R\cos\theta - V) \\
V &= \frac{m\dot{\theta} R\cos}{M+m}
\end{aligned}
$$

4.2 จากกฎการณ์อนุรักษ์พลังงาน จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_2 \\
mga &= mga\cos\theta + \frac{1}{2}MV + \frac{1}{2}m(v\cos\theta - V)^2 + \frac{1}{2}m(v\sin\theta)^2 \\
2mga(1-\cos\theta) &= MV^2 + m(v^2\cos^2\theta - 2vV\cos\theta + V^2) + m(v^2\sin^2\theta) \\
2mga(1-\cos\theta) &= V^2(M+m) - 2mvV\cos\theta + mv^2(\sin^2\theta + \cos^2) \\
2mga(1-\cos\theta) &= \left(\frac{m\dot{\theta} a\cos\theta}{M+m}\right)^2 (M+m) - 2m(\dot{\theta} a)\left(\frac{m\dot{\theta} a\cos\theta}{M+m}\right)^2 \cos\theta + V^2) + m(\dot{\theta} a)^2 \\
2mga(1-\cos\theta) &= \left[\frac{\left(m\dot{\theta} a\cos\theta\right)^2}{M+m}\right]\dot{\theta}^2 - 2\left[\frac{\left(m\dot{\theta} a\cos\theta\right)^2}{M+m}\right]\dot{\theta}^2 + ma^2\dot{\theta}^2 \\
2g(1-\cos\theta) &= \left[a - \frac{ma\cos^2\theta}{M+m}\right]\dot{\theta}^2 \\
2g(1-\cos\theta) &= \left[\frac{M+m(1-\cos\theta)^2}{M+m}\right]a\dot{\theta}^2
\end{aligned}
$$

4.3

$$
\theta = \arccos\left[\frac{2(M+m)}{2(M+m)+M}\right]
$$